

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Igazold, hogy $\sqrt{7}(\sqrt{6}+1) - \sqrt{6}(\sqrt{7}+1) = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$.
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 2$ függvények. Igazold, hogy $f(x+1) - f(x) = g(x)$, bármely x valós szám esetén!
- 5p 3. Oldd meg a $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Adott az $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz. Határozd meg az M halmaz legalább három elemet tartalmazó részhalmazainak a számát!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $ABCD$ trapéz, amelyben $AB \parallel CD$ és $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ és $D(-3, 2)$. Határozd meg az MN egyenes egyenletét, ha az MN szakaszcól tudjuk, hogy az $ABCD$ trapéz középvonala.
- 5p 6. Számítsd ki $\sin 2x$ értékét, ha tudjuk, hogy $(2\sin x + \cos x)^2 = 2 + 3\sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol $i^2 = -1$ és a egy valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = i$.
- 5p b) Igazold, hogy bármely a valós szám esetén, az $A(a)$ mátrix invertálható!
- 5p c) Számítsd ki: $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{2020\text{-szor az } A(0)}$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12$ műveletet.
- 5p a) Igazold, hogy $x * 1 = 3$, bármely x valós szám esetén!
- 5p b) Határozd meg az x valós számot, ha tudjuk, hogy $0 * x = -9$.
- 5p c) Igazold hogy, ha $x * y = 3$ akkor $(x-1)(y-1) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1)$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy az Ox tengely érintője az f függvény grafikus képének!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy bármely n nullától különböző természetes szám esetén az $f(x) = n$ egyenletnek két különböző valós megoldása van!
2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^e \frac{f(x)}{e^x} dx = 1$.

5p b) Igazold, hogy $\int_1^2 x^3 f(x^2) dx = \frac{e(e-1)(e^2+e+1)}{2}$.

5p c) Igazold, hogy $\int_1^e f(x) dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^e$.