

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADAT

(30 punct)

- 5p 1. Mutasd ki, hogy a $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ és $\log_5 9$ számok egy mértani haladvány egymás utáni tagjai.
- 5p 2. Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Igazold, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(-x)$ függvény páratlan.
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $3^x + 3^{\frac{1}{2}-x} = 1 + \sqrt{3}$.
- 5p 4. Határozd meg, hogy az $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$ kifejtésében melyik tag tartalmazza x^{10} -t, $x \in \mathbb{R}^*$.
- 5p 5. Az ABC háromszög síkjában adott a G pont, mégpedig úgy, hogy $3\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Bizonyítsd be, hogy G az ABC háromszög súlypontja.
- 5p 6. Határozd meg azt az $x \in (0, \pi)$ számot, melyre $\sin 2x - 3\sin x - 2\cos x + 3 = 0$.

II. FELADAT

(30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $M(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol m egy valós szám.
- 5p a) Mutasd ki, hogy $\det A = 1$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy az $M(m)$ mátrix rangja különbözik 2-től, tetszőleges m valós szám esetén.
- 5p c) Határozd meg azt az m , $m \neq 1$ valós számot, melyre az $M(m)$ mátrix inverze az A mátrix.
2. A komplex számok halmazán értelmezzük a $z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + z_1 z_2$ műveletet.
- 5p a) Mutasd ki, hogy $(1+i) \circ (2-i) = 6+i$.
- 5p b) Igazold, hogy $z \circ \bar{z}$ valós szám, bármilyen z komplex szám esetén.
- 5p c) Határozd meg azokat a z komplex számokat, melyekre $z \circ z = -2$.

III. FELADAT

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény vízszintes aszimptotájának egyenletét $-\infty$ felé.
- 5p c) Számold ki a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n) + 2 \ln n)$ határértéket!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 e^x f(x) dx = \frac{4}{3}$.

- 5p** | b) Számold ki az $\int_0^1 f(-x)dx$ határozott integrált!
- 5p** | c) Határozd meg az a és b valós számokat, tudva azt, hogy a $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $F(x) = e^{-x}(-x^2 + ax + b)$ függvény a f egy primitív függvénye.