

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Határozd meg annak az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani sorozatnak az a_2 tagját, amelyben $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4$.
- 5p** 2. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 6$ függvényt. Igazold, hogy az $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ szám természetes szám.
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazában a $\log_5(4-x) = 3 - \log_5(24-x)$ egyenletet.
- 5p** 4. Határozd meg azon halmaz elemeinek számát, amelynek pontosan 45 kételemű részhalmlaza van.
- 5p** 5. Tekintsük az $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ és $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ vektorokat. Határozd meg az a valós számot, ha tudjuk, hogy az $\vec{u} - \vec{v}$ és $3\vec{v}$ vektorok kollineárisak.
- 5p** 6. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza 6, illetve 8. Határozd meg e háromszögbe írt kör sugarának hosszát.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(a) = \begin{pmatrix} 5-a & 10 \\ -2 & -4-a \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol a valós szám.
- 5p** a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = 0$.
- 5p** b) Határozd meg az a valós számot, ha tudjuk, hogy $A(a) \cdot A(a) = A(0)$.
- 5p** c) Határozd meg az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre teljesül az $A(-1) \cdot X = A(0)$ tulajdonság.
2. A valós számok halmazában értelmezzük az $x * y = 3x - 2y + 1$ műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy $5 * 8 = 0$.
- 5p** b) Határozd meg az x valós számot, amelyre $2020^x * 2020^x = 2$.
- 5p** c) Igazold, hogy végtelen sok egész számból álló (m, n) számpár létezik, amelyekre $m * n = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ függvényt.
- 5p** a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Igazold, hogy bármely a nullától különböző valós szám esetén, az f függvény grafikonjához az $A(a, f(a))$ és $B(-a, f(-a))$ pontokba húzott érintők párhuzamosak egymással.
- 5p** c) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x}$.
2. Tekintsük az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2\ln(2x + 1)$ függvényt.
- 5p** a) Igazold, hogy $\int_0^1 (f(x) - 2\ln(2x + 1)) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Számítsd ki $\int_0^1 f(x) dx$.

5p | c) Ha F az f függvény egy primitív függvénye, igazold, hogy $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.