Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Mutassátok ki, hogy a $z=\dfrac{1+2i}{1-2i}$ komplex szám modulusa 1.

5p **2.** Igazoljátok, hogy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ páros függvény.

5p **3.** Oldjátok meg a $\sqrt{x+2}=x$ egyenletet a valós számok halmazán.

5p **4.** Határozzátok meg annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy kétjegyű természetes számot, mindkét számjegye osztható legyen 3-mal.

5p **5.** Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB=AC$, az AC oldal felezőmerőlegesének egyenlete $y=3x+1$, az A-ból a BC-re bocsátott merőleges egyenes egyenlete pedig $2y=x+7$. Határozzátok meg az ABC háromszög köré írt kör középpontjának koordinátáit.

5p **6**. Határozzátok meg x-et, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ tudva, hogy $\sin x\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Adott az $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrix, ahol $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $\det\left(A(a)\right)=1$, bármely $a\in(0,+\infty)$ esetén.

5p **b)** Igazoljátok, hogy $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, bármely $a,b\in(0,+\infty)$ esetén.

5p **c)** Határozzátok meg az $a\in(0,+\infty)$ számot úgy, hogy $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x\circ y=\dfrac{1}{3}xy+x+y$ asszociatív műveletet.

5p **a)** Igazoljátok, hogy $x\circ y=\dfrac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, bármely x és y valós szám esetén.

5p **b)** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$ függvény. Mutassátok ki, hogy $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, bármely x és y valós szám esetén.

5p **c)** Igazoljátok, hogy $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, bármely $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ és bármely $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ și x_n valós számok esetén.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Adott az $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ függvény.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Határozzátok meg az f függvény grafikus képéhez az $x_0=2$ abszcisszájú pontban húzott érintő egyenletét.

5p **c)** Határozzátok meg az f függvény két aszimptotája metszéspontjának koordinátáit.

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ függvény.

5p **a)** Mutassátok ki, hogy $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Számítsátok ki $\int_0^4\left(f(x)-f(-x)\right)dx$.

5p **c)** Határozzátok meg az a valós számot, $a>4$ úgy, hogy $\int_4^a\dfrac{f(x)}{x}dx=10+\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.